



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA

Matrices Invertibles

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



MATRIZ INVERTIBLE

Definición:

Sea una matriz $A \in K^{n \times n}$, se dice que A es una matriz invertible si existe una matriz $B \in K^{n \times n}$ tal que:

$$AB = BA = I_n,$$

donde B es la inversa de A , la cual se denota por A^{-1}

Nota:

- Una matriz invertible se le conoce también como matriz inversible.
- La inversa de una matriz es única.

Propiedades

Sean $A, B \in K^{n \times n}$ matrices invertibles

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A, \alpha \neq 0$
4. $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, m \in \mathbb{N}$
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $(I_n)^{-1} = I_n$
7. Si A es una matriz simétrica e invertible, entonces A^{-1} es una matriz simétrica.
8. Si A es una matriz antisimétrica e invertible, entonces A^{-1} es una matriz antisimétrica.

Problema Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- I. Si $A^3 = I_n$, hallar la inversa de A
- II. Si $A^2 = 5I_n$, hallar la inversa de $A - 2I_n$
- III. Si $A^4 = 3I_n$, hallar la inversa de $A + I_n$

Rpta.

I. $A^{-1} = A^2$

II. $(A - 2I_n)^{-1} = A + 2I_n$

III. $(A + I_n)^{-1} = -0.5(I_n - A + A^2 - A^3)$

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Operaciones Elementales por filas

1. Producto de un escalar a una fila

Se multiplica por α a todos los elementos de la fila "i", dicha operación se denota por $F_i \rightarrow \alpha F_i$

2. Intercambio de filas

Se intercambian las filas "i" y "j", dicha operación se denota por $F_i \leftrightarrow F_j$

3. Suma de una fila con el múltiplo de otra fila

Se multiplica por α a la fila "i" y se suma a la fila "j", el resultado se reemplaza en la fila "i", dicha operación se denota por $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$

Nota: Se define las operaciones elementales por columnas de manera similar.

MÉTODO DE GAUSS

Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz inversible se tiene el siguiente esquema

$$\begin{bmatrix} A : I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{O.E. por filas}} \begin{bmatrix} I_n : A^{-1} \end{bmatrix}$$

Nota: En el caso que las operaciones sean por columnas

$$\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{O.E. por columnas}} \begin{bmatrix} I_n \\ \vdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

 A^{-1}

Resolución:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 + (-1)f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$E_{13}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = E_{23} E_{13}(-1) I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ELEMENTAL

Definición:

Es aquella matriz que se obtiene al aplicar una operación elemental a una matriz identidad.

Tipos:

Tenemos tres operaciones elementales, por tal motivo se definen tres tipos de matrices elementales.

1. $E_i(\alpha)$: Multiplicando la fila "i" de la matriz identidad por α .
2. E_{ij} : Intercambiando la fila "i" por la fila "j" de la matriz identidad.
3. $E_{ij}(\alpha)$: Suma de la fila "i" con αF_j de la matriz identidad.

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo.

Nota : Las matrices elementales son invertibles.

Ejemplo:

Matrices elementales filas

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow \alpha f_1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1(\alpha)$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 + (\alpha)f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{23}(\alpha)$$

Ejemplo:

Matrices elementales columnas

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \rightarrow \alpha c_1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow c_2 + (\alpha)c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $A \in K^{m \times n}$, donde la matriz A se puede expresar de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ donde } a_i \text{ es la fila "i" de la matriz A. Se cumple:}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } E_i(\alpha)A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} & \text{ii) } E_{ij}A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} & \text{iii) } E_{ij}(\alpha)A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema

Sea $A \in K^{m \times n}$, donde la matriz A se puede expresar de la forma

$A = (c_1 \cdots c_n)$ donde c_i es la columna "i" de la matriz A . Se cumple:

i) $AE_i(\alpha) = (c_1 \cdots \alpha c_i \cdots c_n)$

ii) $AE_{ij} = (c_1 \cdots c_j \cdots c_i \cdots c_n)$

iii) $AE_{ij}(\alpha) = (c_1 \cdots c_i + \alpha c_j \cdots c_j \cdots c_n)$

Ejemplo

$$E_2(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En este caso las matrices elementales son **2×2**

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} E_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} E_{23}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 22 \end{pmatrix}$$

En este caso las matrices elementales son **3×3**

Teorema

Si $A \in K^{n \times n}$ inversible, entonces existen $E_1, E_2, \dots, E_p \in K^{n \times n}$ matrices elementales por filas que cumplen:

$$E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A = I_n$$

Teorema

Si $A \in K^{n \times n}$ inversible, entonces existen $F_1, F_2, \dots, F_q \in K^{n \times n}$ matrices elementales por columnas que cumplen:

$$A F_1 F_2 \dots F_{q-1} F_q = I_n$$

Teorema

Toda matriz elemental es inversible y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo

i) $(E_i(\alpha))^{-1} = E_i(\alpha^{-1}), \alpha \neq 0$

ii) $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha), i \neq j$

iii) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}, i \neq j$

MATRICES EQUIVALENTES

Definición:

Sean las matrices $A, B \in K^{m \times n}$ se dice que son matrices equivalentes si a partir de la matriz A se obtiene la matriz B mediante operaciones elementales. En otras palabras, se dice que A y B son matrices equivalentes si existen una matrices $P \in K^{m \times m}$ y $Q \in K^{n \times n}$ inversibles tal que

$$B = PAQ$$

Ejemplo: Las siguientes matrices son equivalentes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Las siguientes matrices son equivalentes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 16 & 4 & -26 \end{pmatrix}$$

Explicación:

$$\begin{matrix} E_{22}(4) & E_{12} & E_1(2) & & E_{23} & E_{13}(-2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 16 & 4 & -26 \end{pmatrix}$$

Observación:

- Cuando la matriz $Q = I_n$, se dice que A y B son matrices equivalentes por filas.
- Cuando la matriz $P = I_m$, se dice que A y B son matrices equivalentes por columnas.

Ejemplo: Las siguientes matrices son equivalentes por filas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Las siguientes matrices son equivalentes por columnas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Las siguientes matrices son equivalentes por filas

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Explicación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1) \leftrightarrow f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Las siguientes matrices son equivalentes por columnas

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Explicación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12} \leftrightarrow c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$